

12. cvičení - teorie

Věta (Lepení). Necht' I je neprázdný otevřený interval, $f, F: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $c \in I$ a pro každé $x \in I \setminus \{c\}$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom $F' = f$ na I .

Jak lepit

Necht' $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c, f: (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce. Budiž $F_1: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, G_1: (b, c) \rightarrow \mathbb{R}$ spojité t.ž. $F'_1 = f$ na (a, b) a $F'_2 = f$ na (b, c) .

Pak nalezneme konstantu $K \in \mathbb{R}$ t.ž. $F_1(b-) + K = F_2(b+)$.

Definujeme funkci $F(x) := \begin{cases} F_1(x) + K, & x \in (a, b) \\ F_1(b-) + K, & x = b \\ F_2(x), & x \in (b, c). \end{cases}$

Pak $F' = f$ na (a, c) .

Definice (Určitý integrál). Necht' $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a F ke primitivní funkce k f na (a, b) . Pak

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+),$$

kde

$$F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x),$$

pokud limity i jejich rozdíl existují jako prvky $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Značení. $[F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+)$, navíc pro $a < b$ definujeme $[F(x)]_b^a$ jako $-[F(x)]_a^b$.

Poznámka. Některé integrály na nekonečných intervalech vychází konečně, jiné nekonečně. Např. lze ukázat: $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$ a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty$.

Věta (Aditivita integrálu). Necht' $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a < c < b$.

(i) Pokud existuje $\int_a^b f(x) dx$, pak existují i $\int_a^c f(x) dx$ a $\int_c^b f(x) dx$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(ii) Pokud existují $\int_a^c f(x) dx, \int_c^b f(x) dx$ a f je v c spojitá, pak existuje $\int_a^b f(x) dx$ a je roven $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Věta (Substituce pro určitý integrál). Necht' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ φ je diferencovatelná na intervalu (α, β) a ryze monotónní a F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = [F(y)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

Příklad.

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x - 1 dx &= |y = 2x - 1, dy = 2dx, 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 1 = -1, 1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 1| = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} (1^2 - (-1)^2) = 0 \end{aligned}$$

Zde je $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = 2x - 1$ je ryze monotónní funkce t. ž. $\varphi(0) = -1, \varphi(1) = 1$.

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory !!!

Goniometrické substitute

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, dt = -\sin x dx$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, dt = \cos x dx$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2}$$

- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu dt nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R(x, \sqrt[m]{x+a}), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \implies t = \sqrt{a \frac{x-x_1}{x-x_2}}$
 - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt[6]{x})^3$ a $(\sqrt[6]{x})^2$).